הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2 מ–104022

מבחן סוף סמסטר מועד א', אביב התשפ"א - 12/07/2021

מספר סטודנט: | | | | | | | | | |

משך הבחינה שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון. לבחינה שני חלקים: בחלק א' 7 שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' 2 שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מ־7 השאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על 2 השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך. אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. המרחק בין המישור העובר דרך הנקודות $(1,1,0)$, $(-1,3,0)$ ו־ $(3,0,1)$ לנקודה $(1,2,3)$ הוא

א. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ב. $\sqrt{3}$

ג. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

ד. $2\sqrt{3}$

ה. $5\sqrt{3}$

2. נתונה פונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני בסביבת הראשית. ידוע כי פולינום טיילור מסדר שני סביב $(0,0)$ של הפונקציה $f(x,y)$ הוא $T_2(x,y) = 3 - \frac{x^2}{2} + xy - y^2$.
אזי הנקודה $(0,0)$ היא

א. נקודת מקסימום מקומי

ב. נקודת מינימום מקומי

ג. נקודת אוכף

ד. אינה אקסטרמום מקומי ואינה אוכף

ה. לא ניתן לקבוע על סמך הנתונים

3. $f(x,y)$ היא פונקציה גזירה ברציפות בכל המישור. ידוע כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x^2, 2x-1) = x^3$. אזי ערך הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(4,3)$ בכוון הוקטור $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$ הוא

א. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

ב. $\frac{6}{\sqrt{5}}$

ג. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

ד. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ה. $\frac{12}{\sqrt{5}}$

4. נגדיר קבוצה A ע"י $A := \{(x,y,z) \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ xy^2z^3 = 108\}$,
ונגדיר $\alpha = min\{x+y+z \ : \ (x,y,z) \in A\}$. אזי ערכו של α הוא

א. 3

ב. 6

ג. 9

ד. 12

ה. 18

5. יהי V התחום במרחב המוגדר ע"י $V := \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 \le 2 \ , \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$.
אזי ערכו של האינטגרל $\iiint\limits_V \frac{z}{\pi(1+x^2+y^2)} dxdydz$ שווה לערך האינטגרל

א. $\int\limits_0^1 \frac{2t-2t^3}{1+t^2} dt$

ב. $\int\limits_0^1 \frac{2-2t^2}{1+t^2} dt$

ג. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$

ד. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{2-2t^2}{1+t^2} dt$

ה. $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{t-t^3}{1+t^2} dt$

6. יהי C המעגל במישור המוגדר ע"י המשוואה $x^2+y^2=R^2$. צפיפות המסה נתונה ע"י $\rho(x,y) = |\frac{x}{x^2+y^2}|$. אם נגדיל את רדיוס המעגל R פי 2 אזי המסה שלו תגדל פי

א. 2

ב. 4

ג. $\frac{1}{2}$

ד. $\frac{1}{4}$

ה. לא תשתנה

7. תהי $f(t)$ פונקציה רציפה לכל t המקיימת $f(4)=2$. נגדיר פונקציה של משתנה יחיד $g(m)$ ע"י: $g(m) := \iiint\limits_{B_m} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ כאשר B_m הוא כדור סביב הראשית ברדיוס m כלומר $B_m := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le m^2\}$. אזי הערך של $g'(2)$ שווה ל־

א. 2π

ב. 4π

ג. 8π

ד. 16π

ה. 32π

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (20 נקודות)

נגדיר פונקציה $f(x,y)$ ע"י: $f(x,y) = x^3y^{5-k} + x^ky^4 - 2xy^k$.

א. (6 נקודות) הוכיחו כי לכל $k < 3$ המשוואה $f(x,y) = 0$ מגדירה בסביבת הנקודה $(1,1)$ פונקציה סתומה גזירה ברציפות $y(x)$.

ב. (6 נקודות) מצאו עבור אילו ערכי k מערכי k הנ"ל הפונקציה $y(x)$ עולה בסביבת $x_0 = 1$.

ג. (8 נקודות) עבור אילו ערכי k מהערכים בסעיף א' הנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת קיצון מקומי? מאיזה סוג (מקסימום או מינימום)?

9. (24 נקודות)

נגדיר $\vec{F}$ שדה וקטורי במרחב ע"י $\vec{F}(x,y,z) := [(x-1)^2+yz]\,\widehat{i}+[(y+2)^2+xz]\,\widehat{j}+(x^2+y^2+z^2)\,\widehat{k}$.

א. (8 נקודות) חשבו את השטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח $(a>0)$

$$S_1 = \{(x,y,z):\ z=a\ ,\ x^2+y^2 \le a^2\}$$

כאשר נורמל למשטח הוא בעל רכיב z חיובי.

ב. (16 נקודות) חשבו את השטף של השדה $\vec{F}$ דרך המשטח $(a>0)$

$$S_2 = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2,\ z \le a\}$$

כאשר נורמל למשטח הוא בעל רכיב z חיובי.

דף ריק למקרה הצורך